BERECHNUNG EINES INTEGRALS, DAS BEI DER BESTIMMUNG DES RANGES DER SCHAR DER SIEGELSCHEN MODULFORMEN AUFTRITT

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von

Werner Quaas
aus Eielstädt

Göttingen 1975

1976

BERECHNUNG EINES INTEGRALS, DAS BEI DER BESTIMMUNG DES RANGES DER SCHAR DER SIEGELSCHEN MODULFORMEN AUFTRITT

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von
Werner Quaas
aus Eielstädt

Göttingen 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent: Professor Dr. U. Christian

Korreferent: Professor Dr. M. Deuring

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Februar 1976

Meinem verehrten Lehrer,

Herrn Professor Dr. U. Christian,

danke ich sehr für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine Anleitung und Unterstützung bei ihrer Durchführung.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534923_0015

Inhaltsverzeichnis

	Einleitung	1
§1	Definitionen und einige Sätze	3
§2	Eine Konvergenzbetrachtung	9
§3	Berechnung des Integrals	14
	Literaturverzeichnis	16

Die Berechnung des Ranges der Schar der Modulformen zur Siegelschen Modulgruppe n-ten Grades läßt sich zurückführen auf die Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen aller Grade $\leq n$ (U. Christian[2], Formeln (29) und (30)). Ein entsprechender Satz gilt für die Modulformen zur Modulgruppe n-ten Grades und der Stufe q (U. Christian[7], Satz 5.67).

Die Spitzenformen genügen einer Integralgleichung, deren Kern eine Poincarésche Reihe ist. Dabei erfolgt die Summation über die volle Hauptkongruenzgruppe entsprechender Stufe und Grades. Aus der Integralgleichung erhält man eine Integraldarstellung für den Rang der Schar der Spitzenformen (U. Christian[2],[4]). Um bei der Auswertung des Integrals die von U. Christian in[1] entwickelte Reduktionstheorie für symplektische Matrizen anwenden zu können, wird die betreffende Hauptkongruenzgruppe in elementfremde Klassen zerlegt, wobei das charakteristische Polynom der Matrizen und eine Rangbedingung als Kriterien dienen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun das erwähnte Integral für den Grad $n = 3$, die Stufen $q \geq 3$ und diejenigen Matrizen M aus $\Gamma(3,q)$ berechnet, die das charakteristische Polynom $(x - 1)^6$ haben und für deren Rang die Bedingung $Rg(E - M) = 1$ gilt, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnen soll.

Nach der Klärung der Begriffe und dem Beweis zweier später benötigter Hilfssätze im ersten Abschnitt wird im zweiten Abschnitt eine für die Berechnung des Integrals

benötigte Vertauschbarkeit von Summation und Integration nachgewiesen. Dabei werden im Wesentlichen die schon erwähnte Reduktionstheorie von U. Christian und einige von A. Selberg [8] bei der Herleitung der Spurformel durchgeführte Umformungen benutzt. Im letzten Abschnitt erfolgt dann die eigentliche Berechnung des Integrals.

§1 Definitionen und einige Hilfssätze

Mit $\Gamma(n)$ seien die Modulgruppe n-ten Grades und mit $\Gamma(n,q)$ die zugehörige Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe bezeichnet. $\Gamma(n,q)$ besteht also aus allen Matrizen $M \in \Gamma(n)$ mit

(1) $\qquad M \equiv E \bmod q$.

Wir setzen hier stets $q \geq 3$ voraus.

Es bezeichne Rg M den Rang der Matrix M und Det M ihre Determinante.

Wir betrachten nun die folgende Teilmenge von $\Gamma(3,q)$:

(2) $\quad \mathfrak{S}_2(3,q) = \left\{ M \in \Gamma(3,q) \;/\; \mathrm{Det}(xE - M) = (x-1)^6 \,, \; \mathrm{Rg}(E - M) = 1 \right\}$.

$\mathfrak{g}$ sei ein Fundamentalbereich von $\Gamma(3,q)$ in der oberen Halbebene dritten Grades $\mathfrak{Z}(3)$:

(3) $\quad \mathfrak{Z}(3) = \left\{ Z = X + iY \;/\; Z = Z',\ Y > 0 \right\}$

Ferner definieren wir:

(4) $\quad \gamma^{-1}(3,g) = (4\pi)^{3/2} \; (2\pi i)^{-3g} \, \Gamma(g) \, \Gamma(g - \tfrac{1}{2}) \, \Gamma(g-1)$

(5) $\quad \delta(3,g) = 2\,\pi^{3/2} \, (4\pi)^{6-3g} \, \Gamma(g-2) \, \Gamma(g - \tfrac{5}{2}) \, \Gamma(g-3)$

(6) $\quad \eta(3,g) = \gamma^{-1}(3,g) \; \delta^{-1}(3,g)$.

Unter Verwendung der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ der Gammafunktion errechnen wir:

(7) $\quad \eta(3,g) = (-i)^{-g} \pi^{-6} \; 2^{3g-6} (g-1)(g-2)^2 (g-3) \times$
$\times (2g-3)(2g-5)$.

Ist $M \in \Gamma(3)$ gegeben, setzen wir

(8) $\quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit 3x3-Matrizen A,B,C,D.

Es wird dann für $Z \in \mathfrak{Z}(3)$ definiert:

(9) $\quad M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$

(10) $\quad M\{Z\} = CZ + D\,.$

Schließlich sei

(11) $\quad d\omega_Z = \dfrac{dX\,dY}{(\mathrm{Det}\ Y)^4}$

das invariante symplektische Volumenelement.

Im Folgenden soll dann das Integral τ_2 berechnet werden:

(12) $$\tau_2 = \eta(3,g) \int_{\mathfrak{Z}} \sum_{M \in \Gamma_2} \mathrm{Det}(-\bar{Z} + M\langle Z\rangle)^{-g}\,\mathrm{Det}(M\{Z\})^{-g} \times (\mathrm{Det}\ Y)^{g}\, d\omega_Z$$

Dabei wird $g > 6$ vorausgesetzt.

Zuvor definieren wir noch ein weiteres Symbol und beweisen zwei Hilfssätze.

Sei die Matrix M wie in (8) aufgespalten mit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Dabei sollen A_1, B_1, C_1, D_1 2x2-Matrizen und a,b,c,d ganze Zahlen sein.

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Wir schreiben dann:

(13) $\quad M = \{M_1, M_2\}\,.$

Lemma 1

Seien P_1 und P_2 zwei Matrizen des Typs

(14) $$P = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad s \neq 0$$

und $L \in \Gamma(3)$. Dann gilt $LP_1 = P_2L$ genau dann, wenn $P_1 = P_2$ und $L \in \Gamma_1(3)$ sind.

Dabei ist $\Gamma_1(3)$ die erste Spitzengruppe von $\Gamma(3)$ bei Unendlich, das heißt:

$$(15)\ \Gamma_1(3)=\left\{M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & b_{11} & b_{12} & * \\ a_{21} & a_{22} & 0 & b_{21} & b_{22} & * \\ * & * & \pm 1 & * & * & * \\ c_{11} & c_{12} & 0 & d_{11} & d_{12} & * \\ c_{21} & c_{22} & 0 & d_{21} & d_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(3) \right\}$$

Beweis des Lemmas:

a) Mit $P_1 = \begin{pmatrix} E & S_1 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} E & S_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}$,

$$S_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_\nu \end{pmatrix} \qquad \nu = 1,2$$

und $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix}$, $L_\mu = \begin{pmatrix} 1_{11}^{(\mu)} & 1_{12}^{(\mu)} & 1_{13}^{(\mu)} \\ 1_{21}^{(\mu)} & 1_{22}^{(\mu)} & 1_{23}^{(\mu)} \\ 1_{31}^{(\mu)} & 1_{32}^{(\mu)} & 1_{33}^{(\mu)} \end{pmatrix}$ $\mu = 1,2,3$

errechnet man aus $LP_1 = P_2L$ sofort:

$$S_2L_3 = L_3S_1 = 0$$

$$L_1S_1 + L_2 = L_2 + S_2L_4$$

und daraus:

$$1_{31}^{(3)} = 1_{32}^{(3)} = 1_{33}^{(3)} = 1_{13}^{(3)} = 1_{23}^{(3)} = 0$$

$$(16)\ 1_{13}^{(4)} = 1_{23}^{(4)} = 1_{31}^{(4)} = 1_{32}^{(4)} = 0$$

$$1_{33}^{(4)} s_1 = s_2\, 1_{33}^{(4)}$$

(16) bedeutet aber gerade $L \in \Gamma_1(3)$ und $P_1 = P_2$.

b) Die Umkehrung folgt durch eine einfache Rechnung sofort.

Lemma 2

Es sei $Z = X + iY \in \mathfrak{Z}(3)$ in der Darstellung

$$(17) \qquad Z = \begin{pmatrix} & & x_{13} \\ & X_1 & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} & & 0 \\ & Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= X + i\hat{Y}[\hat{L}] \qquad \text{gegeben.}$$

$\mathfrak{g}(2)$ sei ein Fundamentalbereich von $\Gamma(2,q)$ in $\mathfrak{Z}(2)$.
Dann läßt sich der Fundamentalbereich von $\Gamma_1(3,q)$ angeben mit:

$$(18) \qquad X_1 + iY_1 \in \mathfrak{g}(2)$$

$$(19) \quad \begin{cases} |\, x_{13} \,| \leqq \frac{q}{2} \\ |\, x_{23} \,| \leqq \frac{q}{2} \\ |\, x_3 \,| \leqq \frac{q}{2} \\ |\, l_1 \,| \leqq \frac{q}{2} \\ |\, l_2 \,| \leqq \frac{q}{2} \end{cases}$$

Beweis:

Es sei $M \in \Gamma_1(3,q)$, d.h. $M \in \Gamma(3,q)$ und

$$(20) \qquad M = \begin{pmatrix} A & & 0 & B & & *_1 \\ & & 0 & & & *_2 \\ *_3 & *_4 & 1 & *_5 & *_6 & *_7 \\ C & & 0 & D & & *_8 \\ & & 0 & & & *_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

Dann läßt sich die folgende Aufspaltung vornehmen:

$$(21)\quad M = \hat{M}\, M^* = \begin{pmatrix} U' & \hat{S}U^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(22)\quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad u_2, u_3 \in \mathbb{Z}\,, \quad \begin{matrix} u_2 = -*_0 \equiv 0 \bmod q \\ u_3 = -*_3 \equiv 0 \bmod q \end{matrix}$$

$$(23)\quad \hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_3 \end{pmatrix} \qquad \hat{S} \equiv 0 \bmod q$$

Die Anwendung von M^* auf Z bewirkt, daß $Z_1 = X_1 + iY_1$ auf $(AZ_1 + B)(CZ_1 + D)^{-1}$ abgebildet wird.
Da wegen $M \in \Gamma(3,q)$ gilt: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(2,q)$, folgt:

$\mathcal{G}(2)$ ist Fundamentalbereich von Z_1.

Die Anwendung von $\hat{M}$ auf Z bewirkt dann Folgendes:

$\hat{M}\langle Z\rangle = U'Z\,U + \hat{S}$, d.h. im Einzelnen erfolgen die Ergänzungen

$$(24)\quad \begin{aligned} x_{13} &\longrightarrow x_{13} + s_{13} \\ x_{23} &\longrightarrow x_{23} + s_{23} \\ x_3 &\longrightarrow x_3 + s_3 \\ Y &\longrightarrow U'Y\,U = Y[U] \end{aligned}$$

$$Y[U] = \left\{ \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0\ p_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} Y_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} Y_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2+l_1 \\ 0 & 1 & u_3+l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Also erfolgen die Ersetzungen

$$(25) \qquad \begin{aligned} l_1 &\longrightarrow l_1 + u_2 \\ l_2 &\longrightarrow l_2 + u_3 \quad . \end{aligned}$$

Berücksichtigt man $\hat{S} \equiv 0 \bmod q$ und $u_2, u_3 \equiv 0 \bmod q$, so folgt aus (24) und (25) die Aussage des Lemmas.

§2 Eine Konvergenzbetrachtung

Es soll gezeigt werden, daß in (12) die Summation und die Integration vertauscht werden können.

Dazu müssen wir beweisen, daß

$$(26) \qquad \sum_{M \in \mathfrak{S}_2} \int_{\mathfrak{F}} \mathrm{abs}(-\bar{Z} + M\langle Z\rangle)^{-g} \mathrm{abs}(M\{Z\})^{-g} (\mathrm{Det}\ Y)^{g}\, d\omega_Z$$

konvergiert. Dabei bezeichnet abs(M) den absoluten Betrag der Determinante von M.

Die nächsten Schritte lehnen sich an eine Umformung von A. Selberg [8] S.63f an.

Es sei $\{\mathfrak{S}_2\}$ die Menge der Konjugiertenklassen von $\mathfrak{S}_2$, $\{M\} \in \{\mathfrak{S}_2\}$, d.h. M sei die Konjugiertenklasse von $\mathfrak{S}_2$, in der M liegt.

Ferner definieren wir:

$$(27) \qquad [\Gamma(3,q)]_M = \{ N \in \Gamma(3,q) \ / \ NM = MN \} .$$

(28) Den Fundamentalbereich von $[\Gamma(3,q)]_M$ in $\mathfrak{Z}(3)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_M$.

Nach Selberg gilt dann, daß (26) dem folgenden Ausdruck gleich ist:

$$(29) \qquad \sum_{\{M\} \in \{\mathfrak{S}_2\}} \int_{\mathfrak{F}_M} \mathrm{abs}(-\bar{Z} + M\langle Z\rangle)^{-g} \mathrm{abs}(M\{Z\})^{-g} (\mathrm{Det}\ Y)^{g}\, d\omega_Z$$

Unser Ziel ist es jetzt, für $\{\mathfrak{S}_2\}$ ein Repräsentantensystem anzugeben.

Da für $M \in \mathfrak{S}_2$ ja gilt

$$(30) \qquad \mathrm{Rg}(M - E) = 1 ,$$

folgt nach U. Christian [1], Lemma 5 und [5], Satz 2:

Zu jedem $M \in \mathfrak{S}_2$ gibt es ein $R \in \Gamma(3)$ mit

$$R^{-1}MR = \{M_1, M_2\}$$

wobei $M_1 = E$ und $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $s \neq 0$.

Anders gesagt: Zu $M \in \mathfrak{S}_2$ gibt es ein $K \in \Gamma(3)$, so daß

$$M = K^{-1} P K \,, \tag{31}$$

und P hat die Gestalt (14).

Wir setzen jetzt noch

$$\Gamma(3) = G_1 \Gamma(3,q) \cup \ldots \cup G_\alpha \Gamma(3,q) \,. \tag{32}$$

Die G_i ($i = 1, \ldots, \alpha$) repräsentieren also die Nebenklassen von $\Gamma(3)$ nach $\Gamma(3,q)$.

Zusammenfassend ergibt sich: Wenn s über alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen und i von 1 bis α laufen, so repräsentieren die Matrizen

$$G_i^{-1} P G_i \tag{33}$$

alle Konjugiertenklassen von $\mathfrak{S}_2$. Dabei habe P die Gestalt (14) und G_i die Bedeutung (32).

Jetzt muß noch berücksichtigt werden, daß durch die Matrizen (33) eventuell zu viele Repräsentanten gegeben sind, d.h., daß mehrere Matrizen (33) dieselbe Klasse repräsentieren.

Lemma 3

Es gibt $A(\Gamma(3,q),1)$ Matrizen $H_k \in \Gamma(3)$ $(k=1,\ldots,A(\Gamma(3,q),1))$ mit der Eigenschaft: Die Matrizen $H_k P H_k^{-1}$ bilden ein Repräsentantensystem der Konjugiertenklassen von $\mathfrak{S}_2$,

und jede Klasse wird auch genau einmal repräsentiert.

Es gilt:

$$(34) \qquad A(\Gamma(3,q),1) = \frac{1}{2}\, q^6 \prod_{p \mid q} (1 - p^{-6}) \,.$$

Beweis:

Falls es zwei Matrizen der Form (33) gibt, die dieselbe Konjugiertenklasse von $\mathfrak{S}_2$ repräsentieren, existiert ein $N \in \Gamma(3,q)$ mit

$$(35) \qquad N G_i^{-1} P_1 G_i N^{-1} = G_h^{-1} P_2 G_h \qquad i,h \in \{1,\dots,\alpha\}$$

Man setze $L^* = G_h N G_i^{-1}$ und erhält aus (35)

$$L^* P_1 = P_2 L^* .$$

Nun folgt aus Lemma 1 :

$$P_1 = P_2 \quad \text{und} \quad L^* = G_h N G_i^{-1} \in \Gamma_1(3) .$$

Also existiert genau dann ein $N \in \Gamma(3,q)$, welches (35) erfüllt, wenn

$$(36) \qquad G_h \Gamma(3,q)\, G_i^{-1} \cap \Gamma_1(3) \neq \emptyset .$$

Dies stellt aber gerade den Zusammenhang mit den bei U. Christian [3] , S.56 definierten Spitzenanzahlen $A(\Gamma(n,q),j)$ her. Aus dieser Arbeit folgt jetzt sofort das Lemma 3.

Nach diesen Vorbereitungen fahren wir mit der Berechnung von (29) fort und erhalten dafür

$$(37) \qquad \sum_{\substack{k=1,\dots,A(\Gamma(3,q),1) \\ s \neq 0}} \int_{\mathcal{F}_k^{-1} P H_k} \mathrm{abs}(-\bar{Z} + (H_k^{-1} P H_k)\langle Z \rangle)^{-g} \times$$

$$\times \mathrm{abs}(H_k^{-1} P H_k \{Z\})^{-g} (\mathrm{Det}\, Y)^{g} d\omega_Z$$

Für das Integral gilt nun folgende Gleichheit:

$$\int_{\mathcal{F}_{H_k^{-1}PH_k}} \mathrm{abs}(-\overline{Z} + (H_k^{-1}PH_k)\langle Z\rangle)^{-g}\,\mathrm{abs}((H_k^{-1}PH_k)\{Z\})^{-g} \times (\mathrm{Det}\ Y)^g\, d\omega_Z$$

$$= \int_{\mathcal{F}_P} \mathrm{abs}(-\overline{Z} + P\langle Z\rangle)^{-g}\,\mathrm{abs}(P\{Z\})^{-g}(\mathrm{Det}\ Y)^g\, d\omega_Z$$

Wenn man nun noch Lemma 3 berücksichtigt, errechnet man für (37):

$$(38)\qquad A(\Gamma(3,q),1) \sum_{S\neq 0} \int_{\mathcal{F}_P} \mathrm{abs}(-\overline{Z} + P\langle Z\rangle)^{-g} \times \mathrm{abs}(P\{Z\})^{-g}(\mathrm{Det}\ Y)^g d\omega_Z$$

$\mathcal{F}_P$ ist ein Fundamentalbereich von $[\Gamma(3,q)]_P$.

In Lemma 1 fanden wir

$$LP_1 = P_2L \iff (P_1 = P_2 \wedge L\in\Gamma_1(3,q)) \text{ , d.h.}$$

$$(39)\qquad [\Gamma(3,q)]_P = \Gamma_1(3,q) .$$

Das bedeutet aber gerade, daß $\mathcal{F}_P$ auch Fundamentalbereich von $\Gamma_1(3,q)$ ist, und der war in Lemma 2 bestimmt worden.

Unter Berücksichtigung von (17) gilt ferner:

$$(40)\qquad \mathrm{Det}(-\overline{Z} + P\langle Z\rangle) = (\mathrm{Det}\ Y_1)(4s - 8ip_3)$$

$$(41)\qquad \mathrm{Det}(P\{Z\}) = 1$$

Für (38) erhalten wir jetzt:

$$A(\Gamma(3,q),1) \sum_{s\neq 0} \int_{\mathcal{Y}_P} |(\operatorname{Det} Y_1)(4s - 8ip_3)|^{-g} |p_3 \operatorname{Det} Y_1|^{g} \times$$

$$\times (\operatorname{Det} Y)^{-4}\, dX\, dY$$

$$A(\Gamma(3,q),1) \sum_{s\neq 0} \int_{\substack{X_1+iY_1\in\mathcal{Y}(2) \\ |l_1|,|l_2|,|x_{13}|, \\ |x_{23}|,|x_3| \leq \frac{q}{2}}} (\operatorname{Det} Y_1)^{-4} |4s - 8ip_3|^{-g} (\operatorname{Det} Y_1) \times$$

$$\times |p_3|^{g-4}\, dX_1 dx_{13} dx_{23} dx_3 dY_1 dp_3 d\hat{L}$$

$$(42) \quad = q^5\, A(\Gamma(3,q),1) \sum_{s\neq 0} \int_{X_1+iY_1\in\mathcal{Y}(2)} (\operatorname{Det} Y_1)^{-3} |4s - 8ip_3|^{-g} |p_3|^{g-4} \times$$

$$\times dX_1 dY_1 dp_3$$

Folgende Substitution

$$(43) \qquad p_3 = \tfrac{1}{2}|s|\,t$$

führt (42) über in

$$q^5\, A(\Gamma(3,q),1) \sum_{s\neq 0} \int_{X_1+iY_1\in\mathcal{Y}(2)} (\operatorname{Det} Y_1)^{-3} |s|^{-3}\, 2^{3-3g} |1 - it|^{-g} \times$$

$$\times |t|^{g-4} dX_1 dY_1 dt$$

$$(44) \quad = q^5\, A(\Gamma(3,q),1)\, 2^{3-3g}\, \operatorname{Vol}(\mathcal{Y}(2))\, \zeta(3) \int_0^\infty |i+t|^{-g} |t|^{g-4} dt$$

Dieser Ausdruck ist konvergent.

§3 Berechnung des Integrals

Da Summation und Integration in (12) vertauscht werden dürfen, gilt also:

$$\tau_2 = \eta(3,g) \sum_{M \in \Sigma_2} \int_{\mathcal{G}} \mathrm{Det}(-\bar{Z} + M\langle Z \rangle)^{-g} \mathrm{Det}(M\{Z\})^{-g} (\mathrm{Det}\ Y)^{g} d\omega_Z$$

Hierauf können wir, wie bei der Berechnung von (26), die "Selbergschen Umformungen" anwenden und erhalten schließlich wie in (42):

$$\tau_2 = \eta(3,g)\ A(\Gamma(3,q),1)\ q^5 \times$$

$$\times \sum_{s \neq 0} \int_{X_1 + iY_1 \in \mathcal{G}(2)} (\mathrm{Det}\ Y_1)^{-3} (4s - 8ip_3)^{-g} p_3^{g-4} dX_1 dY_1 dp_3$$

Wir substituieren wieder wie in (42), d.h.

$$p_3 = \frac{1}{2} |s| t \quad , \tag{43}$$

und erhalten:

$$\tau_2 = \eta(3,g)\ A(\Gamma(3,q),1)\ q^5 \sum_{s \neq 0} \int_{X_1 + iY_1 \in \mathcal{G}(2)} (\mathrm{Det}\ Y_1)^{-3} \times$$

$$\times (4s - 4|s|ti)^{-g} (\tfrac{1}{2} |s| t)^{g-4} \tfrac{1}{2} |s|\, dX_1 dY_1 dt$$

$$= \eta(3,g)\ A(\Gamma(3,q),1)\ q^5\ \mathrm{Vol}(\mathcal{G}(2))\ 2^{-2g-g+4-1} \times$$

$$\times \sum_{s>0} \int_0^\infty |s|^{-3} \left((1 - it)^{-g} + (-1 - it)^{-g}\right) t^{g-4} dt$$

$$= A(\Gamma(3,q),1)\; q^5\; \mathrm{Vol}(\mathcal{G}(2))\; 2^{4-3g}\, \zeta(3)\, \pi^{-6}\; 2^{3g-6} \times$$

$$\times (g-1)(g-2)^2(g-3)(2g-3)(2g-5)\; \mathrm{Re} \int_0^\infty (i+t)^{-g} t^{g-4} dt$$

$$(44) \quad = A(\Gamma(3,q),1)\; 2^{-2}\; q^5 \pi^{-6}\; \mathrm{Vol}(\mathcal{G}(2))\; \zeta(3) \times$$

$$\times (g-1)(g-2)^2(g-3)(2g-3)(2g-5)\; \mathrm{Re}\; J(g) \quad ,$$

wobei wir schreiben

$$(45) \quad J(g) = \int_0^\infty (i+t)^{-g} t^{g-4} dt \quad .$$

Partielle Integration ergibt:

$$(46) \qquad J(g) = \frac{g-4}{g-1}\, J(g-1), \text{ also:}$$

$$J(g) = \frac{(-3)(-2)(-1)}{(g-1)(g-2)(g-3)}\, J(4) = \frac{-6}{(g-1)(g-2)(g-3)}\, J(4)$$

$$J(4) = \int_0^\infty (t+i)^{-4}\, dt = -\frac{i}{3}$$

Wir erhalten also aus (44):

$$(47) \qquad \tau_2 = 0$$

Literaturverzeichnis

[1] Christian, U. : A reduction theory for symplectic matrices. Mathematische Zeitschrift, Bd. 101, S. 213 - 244 (1967).

[2] Christian, U. : Siegelsche Modulformen und Integralgleichungen. Mathematische Zeitschrift, Bd. 101, S. 299 - 305 (1967).

[3] Christian, U. : Über die Anzahl der Spitzen Siegelscher Modulgruppen. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Bd. 32, S. 55 - 60 (1968).

[4] Christian, U. : Hilbert-Siegelsche Modulformen und Integralgleichungen. Monatshefte für Mathematik, Bd. 72, S. 412 - 418 (1968).

[5] Christian, U. : Zur Theorie der symplektischen Gruppen. Acta Arithmetica, Bd. XXIV , S. 61 - 85 (1973).

[6] Christian, U. : Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 277, S. 130 - 154 (1975).

[7] Christian, U. : Siegelsche Modulfunktionen. Vorlesungsausarbeitung. Göttingen, Wintersemester 1974/75 und Sommersemester 1975.

[8] Selberg, A. : Harmonic analysis and discontinous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. Journal of the Indian Mathematic Society, Vol. 20, p. 47 - 87 (1956).

[9] Morita, Y.: An explicit formula for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree two. Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo, Sec. IA , Vol. 22, No. 1, p. 25 - 65 (1975).

Lebenslauf

von

Werner Quaas

Am 2.November 1949 wurde ich als Sohn des Landwirtschaftsrates Diplomlandwirt Dr. Horst Quaas und seiner Ehefrau Margarete Quaas, geb Lindner, in Eielstädt, Kreis Osnabrück (früher Kreis Wittlage) , geboren. Nach meiner Einschulung am 1.4.1956 in Bohmte, Kreis Osnabrück, besuchte ich ein halbes Jahr die dortige ev. Volksschule. Danach ging ich in Osnabrück zur Schule: Bis 1960 zur Volksschule am Rosenplatz, dann, nach bestandener Aufnahmeprüfung, auf das Ratsgymnasium. Dort bestand ich am 21.6.68 die Reifeprüfung.
Ab Oktober 1968 studierte ich in Göttingen Mathematik mit dem Nebenfach Physik. Am 20.10.1970 legte ich die Vordiplomprüfung und am 8.2.74 die Diplomprüfung ab. Während der Anfertigung dieser Arbeit arbeitete ich vom 1.4.1974 bis zum 30.9.1975 am Mathematischen Institut der Universität Göttingen, zunächst ein Semester lang als Hilfsassistent, danach als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle.